

Filtres de Gabor

Le filtre de Gabor à deux dimensions est représenté par l'équation (A.1)

$$h(x', y') = \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{y'^2}{\sigma_x^2} \right) \right\} \times \left\{ \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x'^2}{\sigma_x^2} \right) \times \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot x') \right\} = h_x(x') \times h_y(y')$$

(A.1)

En considérant $F[f(x, y)] = F(u, v)$ la transformée de Fourier d'une fonction f nous obtenons (A.2):

$$\mathcal{F}[h(x, y)] = \mathcal{F}[h_x(x)] \cdot \mathcal{F}[h_y(y)] = H_x(u) \cdot H_y(v) = H(u, v)$$

(A.2)

En considérant les propriétés de translation (A.3) et de changement d'échelle (A.4) ainsi que la transformée de Fourier d'une gaussienne (A.5),

$$\mathcal{F}[f(x) \cdot e^{-2i\pi f_0 x}] = F(u - f_0)$$

(A.3)

$$\mathcal{F}\left[f\left(\frac{x}{a}\right)\right] = |a| \cdot F(a \cdot u)$$

(A.4)

$$\mathcal{F}[e^{-\pi x^2}] = e^{-\pi u^2}$$

(A.5)

Et en développant le cosinus en somme d'exponentielles (A.6),

$$\cos(2\pi \cdot f_x \cdot x) = \frac{1}{2} (e^{2i\pi f_0 x} + e^{-2i\pi f_0 x})$$

(A.6)

Nous obtenons facilement les transformées de Fourier des composantes en x (A.7) et y (A.8) du filtre de Gabor.

$$H_x(u) = \frac{\sqrt{2\pi \cdot \sigma_x}}{2} \cdot (e^{-2\pi^2 \sigma_x^2 \cdot (u-f_0)^2} + e^{-2\pi^2 \sigma_x^2 \cdot (u-f_0)^2})$$

(A.7)

$$H_y(v) = \sqrt{2\pi} \cdot \sigma_y \cdot e^{-2\pi^2 \sigma_y^2 v^2}$$

(A.8)

La transformée de Fourier du filtre de Gabor défini en (A.1) est donc définie par l'équation

(A.9) qui correspond à deux gaussiens symétriques par rapport à l'origine du domaine fréquentiel et centrées sur les fréquences f_0 et $-f_0$ (voir Figure A-1).

$$H(u, v) = K \left(e^{-2\pi^2(\sigma_x^2(u-f_0)^2 + \sigma_y^2 v^2)} + e^{-2\pi^2(\sigma_x^2(u+f_0)^2 + \sigma_y^2 v^2)} \right) \text{ avec } K = \pi\sigma_x\sigma_y$$

(A.9)

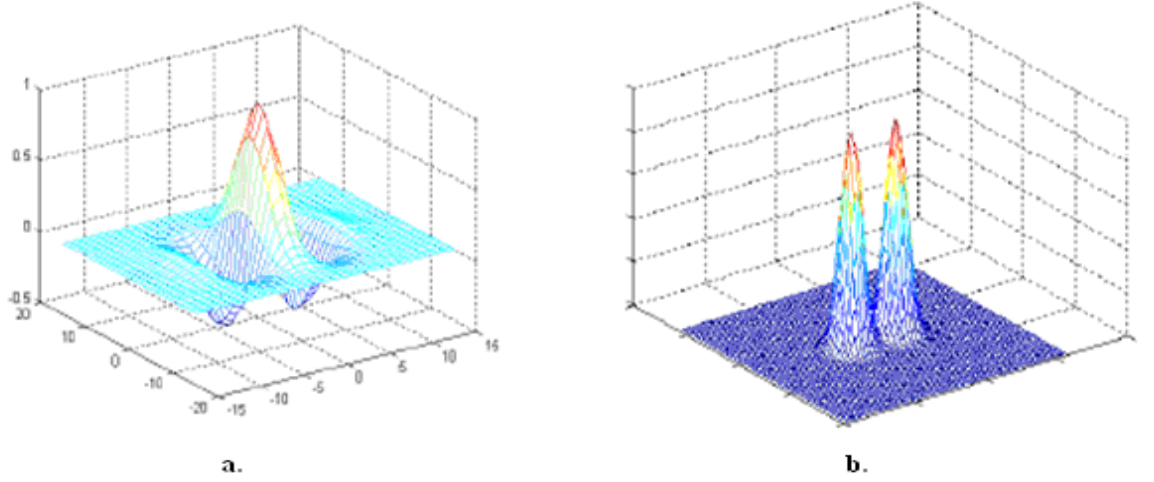


Figure A-1 : Représentation spatiale (a) et fréquentielle (b) d'un filtre de Gabor

Pour trouver l'ensemble des fréquences sélectionnées par le filtre de Gabor on cherche l'ensemble des points vérifiant (A.10)

$$H(u, v) \geq \frac{H_{max}}{2} \text{ avec } H_{max} = K$$

(A.10)

Vue la symétrie de H on considère uniquement la gaussienne centrée en f_0 , l'ensemble des points vérifiant (A.10) est donc contenu dans la surface définie par (A.11)

$$-2\pi^2(\sigma_x^2(u - f_0)^2 + \sigma_y^2 \cdot v^2) = -\ln(2)$$

(A.11)

Qui est équivalent à

$$\left(\frac{u-f_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{v}{b}\right)^2 = 1 \text{ avec } a = \frac{\sqrt{\ln 2/2}}{\pi \cdot \sigma_x} \text{ et } b = \frac{\sqrt{\ln 2/2}}{\pi \cdot \sigma_y}$$

(A.12)

Ceci correspond à l'équation d'une ellipse centrée en f_0 et de rayons a et b (Figure A-2).

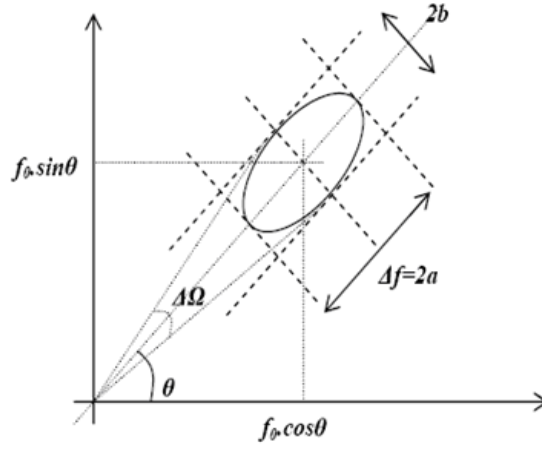


Figure A-2 : Représentation des bandes passantes fréquentielle et directionnelle d'un filtre de Gabor.

Les bandes passantes fréquentielle Δf et angulaire $\Delta\Omega$ sont donc définies par (A.13)

$$\Delta f = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\pi \cdot \sigma_x} \text{ et } \Delta\Omega = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{\ln^2/2}}{\pi \cdot \sigma_0 \cdot f_0} \quad (\text{A.13})$$

Il est plus courant d'exprimer la bande passante fréquentielle Δf en octaves:

$$B(\text{octaves}) = \log_2 \frac{f_{\max}}{f_{\min}} = \log_2 \frac{f_0 + \frac{\Delta f}{2}}{f_0 - \frac{\Delta f}{2}} \quad (\text{A.14})$$

$$= \log_2 \frac{f_0 \cdot \sigma_x + C}{f_0 \cdot \sigma_x - C} \text{ avec } C = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2\pi}$$

Ce qui est équivalent à:

$$f_0 \cdot \sigma_x = \frac{2^B + 1}{2^B - 1} \cdot C \text{ Avec } C = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{2\pi} \quad (\text{A.15})$$

ANNEXE B

Toutes les images utilisées pour les tests de l'identification sont 128 pixels et elles sont disponibles en libre téléchargement à l'adresse suivante:
<http://biometrics.idealtest.org/dbDetailForUser.do?id=5>.